

مقدمه ویرایش جدید



«در یک سمینار رموز موفقیت، سخنران از حضار پرسید: برادران رایت هرگز تسلیم شدند؟ حضار فریاد زدند: نه! نشدند. سخنران پرسید: توماس ادیسون تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران پرسید: لانس آرمسترانگ تسلیم شد؟ حضار: نه! نشد. سخنران برای چهارمین بار پرسید: مارک راسل تسلیم شد؟ مدتی سکوت در کلاس حاکم شد، سپس یکی از حضار پرسید: مارک راسل دیگر کیست؟ ما تا حالا اسم او را نشنیده‌ایم! سخنران گفت: حق دارید که اسمش را نشنیده باشید، چون تسلیم شد!»

این داستان رو نوشتم که چند تا نکته رو بهت بگم. وقتی هنوز یک سال و اندی تا کنکور باقی مونده و تو مشغول خوندن این کتاب تست هستی، معلوم می‌شه جزو دانش‌آموزای خوب و هدفمند هستی و آرزوی رفتن به دانشگاه‌های بزرگ رو در سر داری. در حالی که خیلی از رقیبای تو، در خواب سنگینی به سر می‌برن و هرچی بهشون می‌گی شروع کن می‌گن کو تا کنکور! هنوز وقت هست! عرب‌ها به ضرب المثل دارن که میگه: «شترت را به خدا بسپار ولی افسارش را به درختی ببند.» یعنی امیدت به خدا باشه ولی خودت هم حرکتی، زحمتی، کاری برگردیم سراغ خودت:

بدان و آگاه باش که خوب موقعی شروع کردی و آگه با همین فرمون تا انتها بری و تسلیم نشی، به یاری خدا، بهترین رشته رو توی برترین دانشگاه‌ها قبول می‌شی. دقت کن وضعیت الانت مهم نیست! حتی آگه تا حالا ریاضی رو نفهمیدی و از فرمول‌هاش سردر نیاوردی، به کمک این کتاب به راحتی از پیشش برمیای. یادت باشه تو این مسیر پرفراز و نشیب تا کنکور، خسته می‌شی، می‌بری و از همه بدتر شاید ناامید شی! اما اینو فراموش نکن که هیچ وقت نباید تسلیم ناامیدی بشی! تسلیم شدن رو کلاً از ذهنت پاک کن. برای این که بتونی این مسیر رو تا انتها بری، با این کتاب همراهتیم. این کتاب آخرشه! باور کن! بهش اعتماد کن و ریاضیات رو به ما بسپار.

ویژگی‌های این کتاب

- ۱ درسنامه‌های جامع و مفهومی داره! هم مطالب کتاب درسی توش هست و هم مطالب عمیق‌تر.
- ۲ طبقه‌بندی موضوعی شده، یعنی درسنامه‌های هر فصل به بخش‌های سلولی تقسیم شده تا مجبور نشی کل فصل رو به جا بخونی!
- ۳ اصلاً به مطالب خارج از کتاب درسی نپرداخته، موضوعات فضایی (که نه به درد این دنیا می‌خوره، نه به درد اون دنیا) رو تو کتاب راه ندادیم. باور کن برای دعوت هر کدوم از موضوع‌ها به کتابمون، کلی جلسه گذاشتیم و بحث کردیم. خیلی کار سختی بود ولی می‌ارزید.
- ۴ توی محدوده مطالب کتاب درسی، عمق مطالب در حد چاه عمیقه، یعنی تهش رو برات درآوردیم. با خیال راحت بخونش و مطمئن باش هیچی جا نمونده.
- ۵ هیچ مطلبی رو بدون مثال برات باقی نذاشتیم. همه مثال‌هامون هم از فیلتر استادای عالی و باتجربه گذاشتن و بعدش به همشون به طور کامل و آموزشی جواب دادیم.
- ۶ پُر از تست‌های دوست‌داشتنی! تست‌ها رو هم از ساده به سخت چیدیم که اولش با دیدن یه تست سخت، سخته نکنی 😊 و از ریاضی فراری نشی.
- ۷ همه تست‌های کنکورهای جدید، حتی کنکور امسال! تو کتابمون هست، البته فقط تست‌هایی را آوردیم که مربوط به کتاب جدید.
- ۸ پاسخ‌نامه‌ش پُر از راهبردهای عالی! این راهبردها مثل GPS می‌مونن. به کمک اون‌ها، توی حل سؤال گیر نمی‌کنی و می‌دونی که چه مسیری رو باید دنبال کنی. پاسخ‌نامه این کتاب به جز راهبرد، به کلی نکته‌های تستی و تکنیک‌های محاسباتی و... مسلح شده!
- ۹ مثل کتاب درسی، تست‌هامون رویکرد مسائل واقعی گرفتن، مثلاً وقتی می‌خوایم فاصله دو نقطه رو بهت یاد بدیم، از فاصله نیمکت بین تو و دوستت استفاده کردیم.

۱۰ تعداد تست‌هاش خیلی زیاده و البته متناسب با اهمیت هر مبحثه! اینقدر که اگه همشون رو کار کنی، به اون مبحث در حد تیم ملی مسلط می‌شی. پُل هالموس می‌گه: تمرین قلب ریاضیات است. اگه اینطوریه پس کتاب ما متخصص قلبه! 

ساختار کتاب

حالا چند جمله‌ای هم راجع به ساختار کتاب برات بگم. توی هر درس اگه لازم بوده، مطالب رو به چند بخش تقسیم کردیم و درسنامه و مثال حل‌شده براش آوردیم، ولی مطالب فنی و تکنیکی رو نگه داشتیم واسه حل تست‌های خفن و اون‌ها را تحت عنوان «راهنبرد» توی قسمت پاسخ تشریحی آوردیم. «راهنبردها» برای کسانی که می‌خوان صد بزنن! بعد از درسنامه هر قسمت، تست‌های مربوط به اون قسمت اومده. یه سری تست‌هایی هم اومده به نام برای ۱۰۰٪ واسه اونایی که می‌خوان ۱۰۰٪ بزنن و مخصوص دانش‌آموزان قویه. فصل که تموم میشه یه آزمون جامع از کل فصل برات گذاشتیم تا خودتو محک بزنی. انتهای کتاب پاسخ تشریحی همه تست‌ها اومده و بعدشم پاسخ‌نامه کلیدی. تست‌ها رو براتون دستچین کردیم تا سوال‌های بی‌کیفیت و کم‌کیفیت توی کتاب نباشه. توی پاسخ‌های تشریحی هم تا می‌شده توضیح دادیم، چون می‌دونیم خیلی از شماها به معلم‌های کنکوری خوب دسترسی ندارید تا سوال‌هایی رو که براتون پیش میاد پیرسید. سوالات سخت رو با علامت  مشخص کردیم. سعی کنید پس از حل سایر تست‌ها سراغ این سوالات بروید.

راهنمای استفاده از کتاب

خب، بذار بگم چطوری از کتاب استفاده کنی! اول درسنامه رو با مثالاش خوب بخون، بعد برو سراغ حل تست‌ها. هر وقت دیدی نمی‌تونی یه سؤال رو حل کنی، برو سراغ پاسخ‌نامه تشریحی، شاید راهنبردی داره که تو بلد نیستی. اگه وقت نداری، تست‌ها رو دو یا چند قسمت کن! مثلاً فقط شماره‌های زوجش رو بزن. نکته‌هایی رو که یاد می‌گیری حاشیه‌نویسی کن و سعی کن لااقل هر دو هفته یه بار اون‌ها رو دوره کنی. در انتهای فصل یا برای جمع‌بندی می‌تونی از آزمون انتهای فصل استفاده کنی و ببینی توی زمان پیشنهادی می‌تونی چه درصدی بزنی.

و اما قدردانی...

اول! باید از آقای احمد اختیاری مدیر انتشارات تشکر کنم که واقعاً مثل رئیس سازمان استاندارد کشور (!) می‌مونه، یعنی تا کتابی رو به لحاظ محتوایی و ظاهری در حد استانداردهای مهروماه تشخیص نده، اجازه چاپ بهش نمیده، ممنونم که هستید و کیفیت رو بالا نگه می‌دارید.

دوم! باید از آقای محمدحسین انوشه مدیر شورای تألیف تشکر کنم که با توجه به تجربه ۳۰ سالشون در زمینه تألیف، جمعی از بهترین اساتید کشور رو برای نوشتن کتاب دور هم جمع کردن! استادی که هر کدومشون دنیایی از معلومات هستن! استاد نصیر کریمی، دبیر دبیرستان فرزنانگان تهران (تیزهوشان مادر) و استاد تقی‌زاده، مدیر گروه ریاضی دبیرستان البرز.

سوم! از آقای حسن امین‌ناصری مدیر اجرایی انتشارات که در رفع دغدغه‌های ما تلاش‌های فراوانی نمودند تشکر می‌کنم. و در آخر از استادم جناب آقای بهمن اصلاح‌پذیر - که به حق یکی از بزرگ مردان آموزش ریاضی کشور هستن - به خاطر هم‌فکری‌ها و جلسات متعددی که با دبیران و مؤلفان ترتیب دادند و در حقیقت هدایت علمی کتاب رو به عهده داشتند و از استاد گرانقدر جناب آقای هوشنگ نظری - از باسابقه‌ترین دبیران کشور - که ریزبینانه کتاب رو بررسی کردند و پیشنهادهای سازنده‌ای رو دادند. این کتاب مرهون زحمات و تلاش‌های این دوستان است:

سرکار خانم آزاده غنی‌فرد مسئول ویراستاری گروه ریاضی و آقایان مهدی حصاری، مهدی مرادی، وحید جعفری، امیرحسین عباسی، آروین حسینی و سرکار خانم زهرا رسولی ویراستاران کتاب

جناب آقای محسن فرهادی مدیرگروه هنری و تیم حرفه‌ایشون آقایان حسین شیرمحمدی، تایماز کاویانی و حسام طلایی سرکار خانم مریم تاجداری مدیرتولید و تمام عزیزانی که در زمینه تولید کتاب همراهی کردند، به‌خصوص سرکار خانم رویا طبیبی صفحه‌آرای محترم کتاب

جناب آقای امیر انوشه مدیریت سایت، آقای عماد ولدی و همکاران روابط عمومی، بابت همکاری‌های صمیمانه‌شون. از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند. خواهشمند است نظرات خود را از طریق اینستاگرم به آیدی مقابل ارسال نمایند. @ashrafi.official

مدیر پروژه و ناظر علمی

 عباس اشرفی

استادان مشاور به سرپرستی آقای محمد گودرزی که از نظرات ارزنده آن‌ها در ویرایش جدید کتاب استفاده نموده‌ایم:

۱. محمود امیری ۲. محمدرضا بیگی ۳. جهانبخش نیکنام

فهرست

فصل اول هندسه تحلیلی و جبر

۷

فصل دوم هندسه

۳۷

فصل سوم تابع

۶۹

فصل چهارم مثلثات

۱۰۳

فصل پنجم توابع نمایی و لگاریتمی

۱۲۳

فصل ششم حد و پیوستگی

۱۴۵

فصل هفتم آمار و احتمال

۱۶۹

پاسخنامه تشریحی

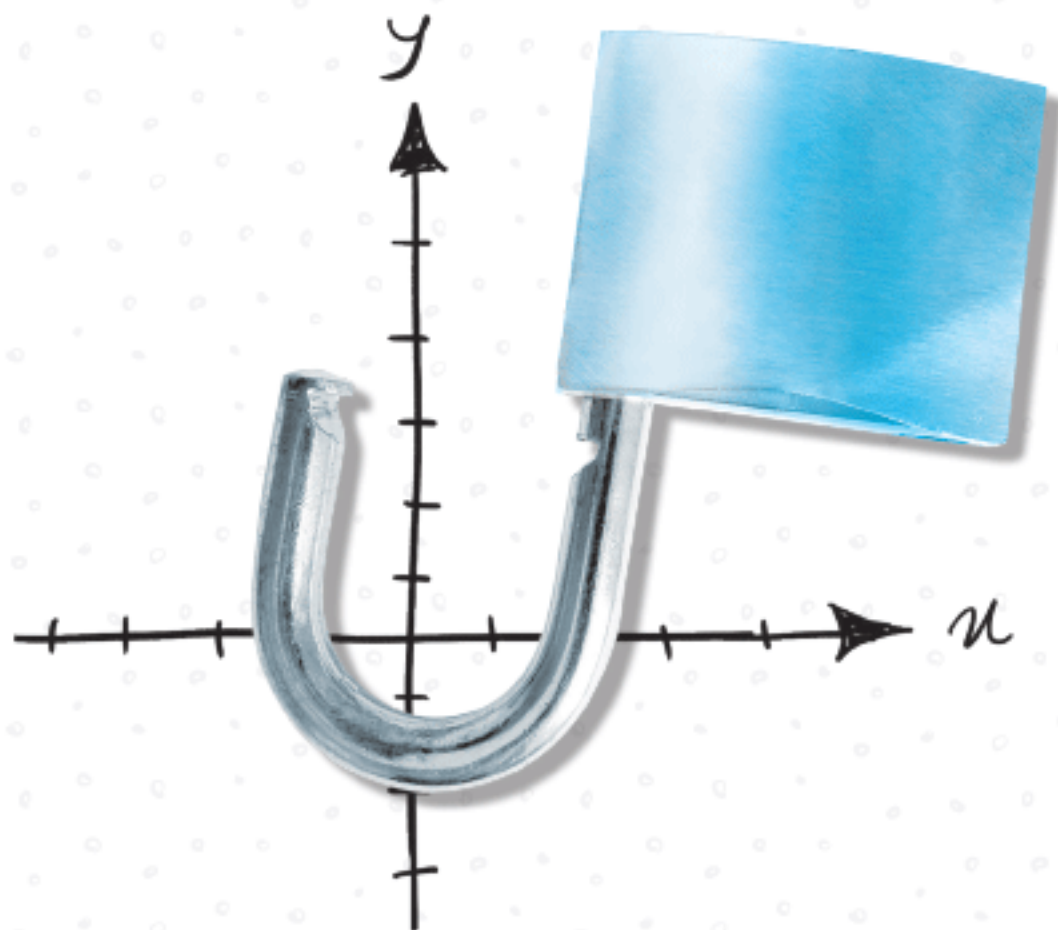
۱۸۹

پاسخنامه کلیدی

۳۱۶

هندسهٔ تحلیلی و جبر

فصلی که می‌بینید جعبه ابزاریه برای استفاده در بقیهٔ مباحث ریاضی. این فصل با هندسه تحلیلی شروع می‌شه (که قبلاً تو کتاب سال چهارم بود). کلی مطالب جدید راجع به خط، نقطه، فاصله‌هاشون از هم و از خودشون رو تو این بخش یاد می‌گیری. بعد وارد تابع و معادلهٔ درجهٔ دوم می‌شه؛ همون سهمی پارسال! ولی این دفعه هم سوال‌های نمودارش و هم معادله‌اش پیچیده‌تر می‌شه. آخرش هم به معادلات گویا و گنگ می‌رسه. این بحث تا آخرین دقایقی که ریاضی می‌خونید، دست از سرتون برنمی‌داره! پس خوب یادش بگیر.

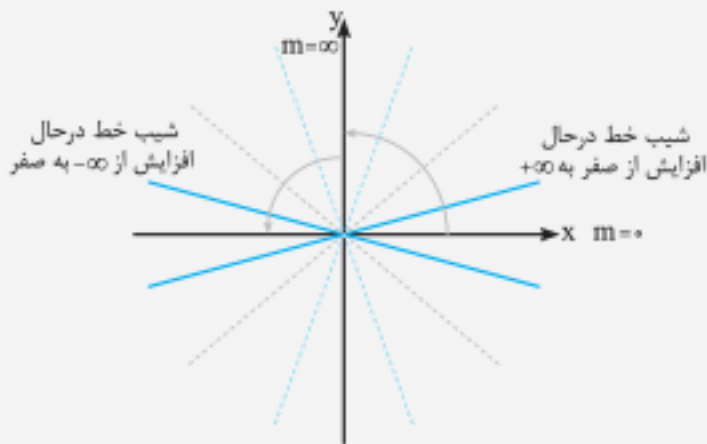


هندسه تحلیلی

یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم معادله خط، شیب، عرض از مبدأ، تابع خطی و... آشنا شدید. در این بخش به‌طور خلاصه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

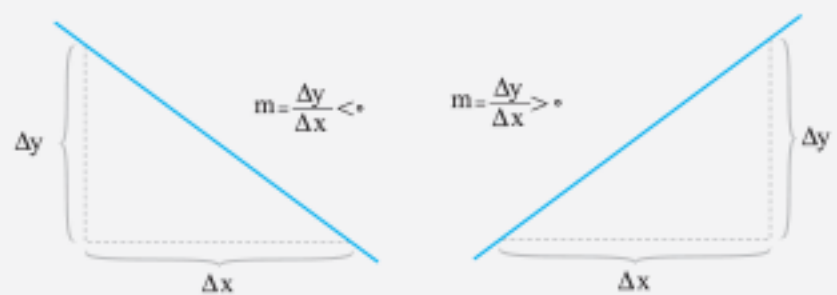
شیب: تعریف‌ها و تعبیرهایی از شیب که تاکنون آموخته‌اید عبارت‌اند از:

الف: میزان تغییرات y به تغییرات x را **شیب خط** گویند. در واقع اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه متمایز باشند ($x_1 \neq x_2$) به $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ شیب خط گذرا از دو نقطه A و B گویند.



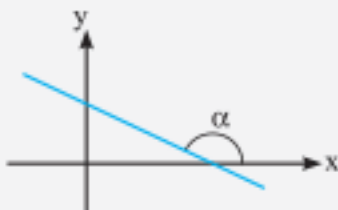
ب: اگر معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، شیب خط برابر a است.

پ: اگر معادله خط به صورت $ax + by + c = 0$ باشد، شیب خط برابر $-\frac{a}{b}$ است.



ت: تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور x می‌سازد، شیب خط نامیده می‌شود.

$$\tan \alpha = m$$



ث: شیب خط $x = a$ تعریف نشده و شیب خط $y = b$ صفر است.

معادله خط

برای به‌دست آوردن معادله خط، دو روش داریم:

۱. **با داشتن شیب و یک نقطه:** معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_0, y_0)$ می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

۲. **با داشتن دو نقطه:** هرگاه دو نقطه $A(x_0, y_0)$ و $B(x_1, y_1)$ را داشته باشیم ($x_0 \neq x_1$)، می‌توانیم به کمک رابطه $m_{AB} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ شیب خط گذرا از نقاط A و B را بیابیم و به کمک معادله $y - y_0 = m(x - x_0)$ ضابطه خط را بیابیم.

نکته

۱. می‌توان معادله خط را به صورت $y = ax + b$ قرض نمود و با جای‌گذاری دو نقطه (x_0, y_0) و (x_1, y_1) و تشکیل دستگاه، مقادیر a و b را به‌دست آورد. به این ترتیب ضابطه $y = ax + b$ به دست می‌آید.

۲. معادله خطی که از دو نقطه (a, y_0) و (a, y_1) ($y_0 \neq y_1$) می‌گذرد، برابر است با $x = a$.

۳. معادله خطی که از دو نقطه (x_0, b) و (x_1, b) ($x_0 \neq x_1$) می‌گذرد، برابر است با $y = b$.

مثال: خط گذرنده از دو نقطه $(1, 2)$ و $(2, 7)$ محور طول‌ها را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

$$-\frac{1}{4} \quad (1) \quad \frac{1}{4} \quad (2) \quad -\frac{1}{5} \quad (3) \quad \frac{1}{5} \quad (4)$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ قرض می‌کنیم معادله خط $y = ax + b$ است. نقاط داده‌شده را در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (1, 2) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 2 &= a(1) + b \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \\ (2, 7) \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow 7 &= a(2) + b \end{aligned}$$

یعنی معادله خط $y = 4x - 1$ است.

$$0 = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

این خط در نقطه‌ای محور طول‌ها را قطع می‌کند که $y = 0$ شود. بنابراین:

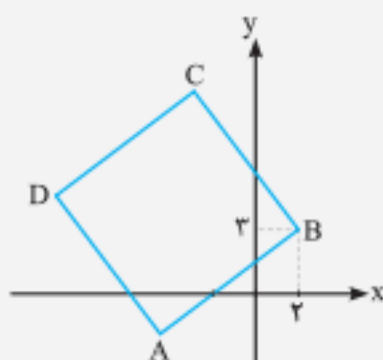
شیب‌های دو خط موازی و دو خط عمود بر هم

مهم

- دو خط موازی، شیب‌های برابر دارند، یعنی اگر شیب‌های دو خط موازی m و m' باشند، باید $m = m'$ باشد و برعکس.
- حاصل ضرب شیب‌های دو خط عمود بر هم برابر -1 است، یعنی $mm' = -1$ است. به عبارت دیگر شیب یکی قرینه و معکوس دیگری است. $(m = -\frac{1}{m'})$

دقت کنید رابطه $mm' = -1$ برای دو خط غیرموازی با محورهای مختصات برقرار است.

مثال: اگر معادله ضلع AB در مستطیل شکل روبه‌رو $2x - 4y = -6$ باشد، عرض از مبدأ خط BC کدام است؟



- $\frac{11}{2}$
- $\frac{14}{3}$
- $\frac{15}{2}$
- $\frac{17}{3}$

پاسخ: ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

ضلع BC بر ضلع AB عمود است، پس شیب BC عکس و قرینه شیب AB است. $AB: 2x - 4y = -6 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_{AB} = \frac{1}{2}$

حال شیب BC را می‌یابیم: $m_{BC} \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{BC} \times \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow m_{BC} = -2$

به کمک مختصات نقطه $B(2, 2)$ و شیب $m = -2$ ، معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6$$

عرض از مبدأ این خط $\frac{3}{2}$ است.

مثال: خط $2x + 5y = 1$ بر خط $y = ax - 2$ عمود است. a کدام است؟

- $\frac{5}{3}$
- $\frac{2}{5}$
- $-\frac{5}{3}$
- $-\frac{2}{5}$

پاسخ: ☒ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

شیب خط بالا $-\frac{2}{5}$ است و شیب خط $y = ax - 2$ نیز برابر a است. از آنجایی که دو خط بر هم عمودند، حاصل ضرب شیب‌ها

برابر -1 است. $a \times -\frac{2}{5} = -1 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

سؤالات چهارگزینه‌ای

۱. معادله خط گذرا از دو نقطه $A(2, 0)$ و $B(0, -2)$ کدام است؟

- $2x - 2y - 6 = 0$
- $2x + 3y + 6 = 0$
- $2x + 3y - 6 = 0$
- $2x - 3y + 6 = 0$

۲. به ازای کدام مقادیر m نقاط $(m, 2)$ ، $(6, 4m + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می‌گیرند؟

- 2 و $\frac{9}{4}$
- 2 و $\frac{2}{4}$
- -2 و $-\frac{2}{4}$
- 2 و $-\frac{9}{4}$

۳. معادله خطی که از نقطه محل برخورد دو خط $y = 2x$ و $y = \frac{x}{2}$ می‌گذرد و بر خط $y = -x + 4$ عمود است، کدام است؟

- $y = x$
- $y = -x$
- $y = x + 1$
- $y = -x + 1$

۴. یکی از خطوط به معادله $(K + 1)y + 2Kx - K + 1 = 0$ بر خط گذرنده از دو نقطه $A(2, -1)$ و $B(8, 2)$ همود است. معادله این خط کدام است؟

- $2y + 3x = 4$
- $2y + 3x = 1$
- $2y - 3x = -5$
- $3y - 2x = -5$

۵. در مثلثی با رئوس $A(-1, -4)$ ، $B(-5, 6)$ و $C(2, 2)$ معادله ارتفاع AH کدام است؟

- $y = 2x - 2$
- $2y + x + 9 = 0$
- $y = 4x$
- $y = -2x - 6$

۶. نقاط $A(2, 5)$ ، $B(2, -1)$ و $C(0, 2)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

- $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
- $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$
- $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$
- $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$

فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ از رابطه روبه‌رو به‌دست می‌آید: **مهم**

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

فاصله هر نقطه مانند $A(x_A, y_A)$ از مبدأ برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

مثال: فاصله دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(-4, 6)$ کدام است؟

۵ (۴)

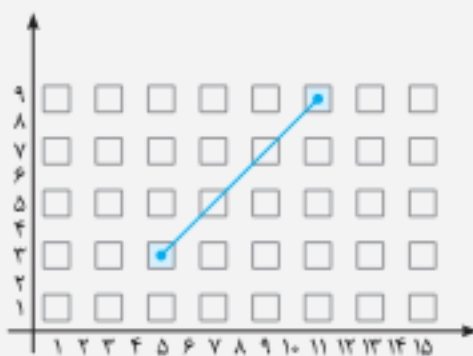
$\sqrt{5}$ (۳)

$2\sqrt{5}$ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: طبق قرمول فاصله دو نقطه را می‌یابیم:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



مثال: در یک کلاس، پنج ردیف ۸ نفره نیمکت مطابق شکل چیده شده است. اگر ابعاد طول و عرض هر نیمکت را ۵۰ سانتی‌متر در نظر بگیریم، فاصله مرکز نیمکت ردیف ۲، شماره ۳ با مرکز نیمکت ردیف ۵، شماره ۶ کدام است؟ (فضای خالی بین دو نیمکت نیز به اندازه یک نیمکت است.)

$25\sqrt{18}$ (۲)

$50\sqrt{18}$ (۱)

$50\sqrt{72}$ (۴)

$25\sqrt{85}$ (۳)

پاسخ: می‌خواهیم فاصله نقطه $(5, 3)$ را از نقطه $(11, 9)$ بیابیم:

$$d = \sqrt{(11 - 5)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72}$$

چون ابعاد هر نیمکت ۵۰cm است، فاصله واقعی $50 \times \sqrt{72}$ می‌باشد.

نقطه وسط پاره‌خط

مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB با مختصات نقاط $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

مهم

مثال: اگر سه نقطه $A(-1, 0)$ ، $B(2, 4)$ و $C(2, 5)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

$\sqrt{12}$ (۴)

$\sqrt{11}$ (۳)

$\sqrt{10}$ (۲)

۳ (۱)

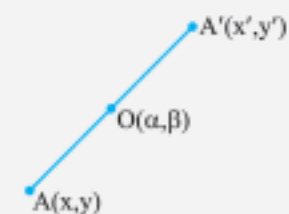
$$M\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = M(0.5, 2)$$

پاسخ: ابتدا مختصات نقطه M وسط AB را می‌یابیم:

$$CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(0.5 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{10}$$

حال طول پاره‌خط CM را می‌یابیم:

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به نقطه $O(\alpha, \beta)$:



$$x' = 2\alpha - x$$

$$y' = 2\beta - y$$

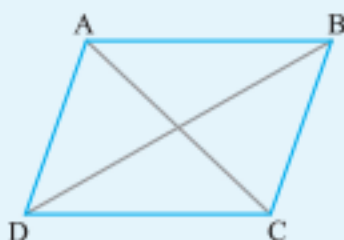
نکته

قرینه نقطه $A(x, y)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $(-x, -y)$.

یک‌گام‌فراتر:

رابطه بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع

در هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، مجموع مختصات رئوس مقابل با هم برابرند.



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

مهم



مهرماه

۷. مختصات وسط دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(-4, 6)$ کدام است؟

- (۱) $(-3, 3)$ (۲) $(4, -\frac{5}{2})$ (۳) $(-\frac{5}{2}, 4)$ (۴) $(3, -2)$

۸. فاصله نقطه $A(x, 1)$ از نقطه $B(3, 4)$ برابر ۵ است. حاصل ضرب مقادیر ممکن برای x کدام است؟

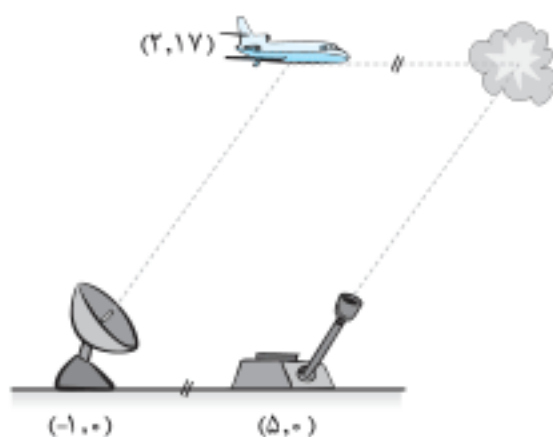
- (۱) ۷ (۲) -۷ (۳) -۹ (۴) ۹

۹. اگر نقاط $A(1, 2)$ ، $B(3, 7)$ ، $C(4, 5)$ و $D(m+1, n-1)$ مختصات چهار رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشند، حاصل $m \cdot n$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۳

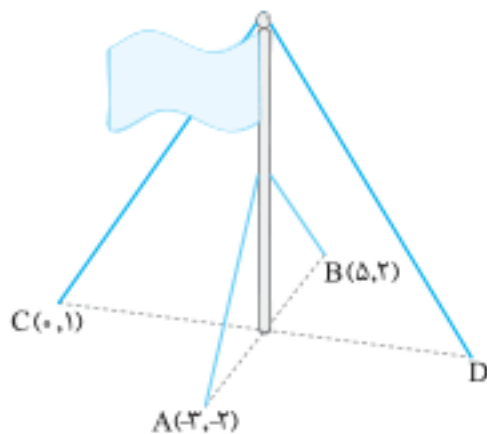
۱۰. مطابق شکل اگر هواپیما، رادار و ضدهوایی در یک صفحه باشند، ضدهوایی به کدام مختصات شلیک کند تا هواپیما شکار شود؟

- (۱) $(8, 17)$ (۲) $(5, 17)$ (۳) $(17, 5)$ (۴) $(17, 8)$



۱۱. یک میله پرچم، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به‌طوری‌که فاصله هر نقطه تا میله با فاصله نقطه مقابل آن تا میله برابر است. مختصات نقطه D کدام است؟

- (۱) $(2, -1)$ (۲) $(-1, 2)$ (۳) $(3, -2)$ (۴) $(-2, 3)$



۱۲. قرینه نقطه $(2, 5)$ نسبت به نقطه (a, b) برابر با (b, a) می‌باشد. $a^2 + b^2$ کدام است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۱۸ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۱۳. در مثلثی با رئوس $A(4, 2)$ ، $B(2, 0)$ و $C(6, -1)$ معادله میانه وارد بر ضلع BC کدام است؟

- (۱) $3y = x - 2$ (۲) $x = 4$ (۳) $y = 3$ (۴) $-y = 3x - 6$

۱۴. نقاط $A(1, 0)$ ، $B(4, 2)$ و $C(a, -a)$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، مثلث ABC در رأس A قائمه و متساوی‌الساقین است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ممکن نیست.

۱۵. نقطه C با کدام طول روی خط $y = 2x - 2$ باشد تا فاصله آن از نقاط $A(1, 2)$ و $B(2, 0)$ یکسان باشد؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{5}{6}$ (۳) $\frac{22}{13}$ (۴) $\frac{12}{6}$

۱۶. اگر $A(-1, 2)$ و $B(2, 4)$ باشند، معادله همودمنصف پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $y = 2x - 5$ (۲) $y = -2x + 5$ (۳) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (۴) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

۱۷. یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات آن‌ها در نقشه به صورت $E(2, 10)$ و $F(7, 2)$ است. هدف آن است که هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانه خود ثبت‌نام کند. معادله خطی که روستا را با این هدف به دو قسمت تقسیم می‌کند، کدام است؟

- (۱) $y = 2x - 4$ (۲) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ (۳) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ (۴) $y = -2x + 4$

۱۸. نقطه $(7, 6)$ رأس متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ هستند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

۱۹. اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $16 = y + 2x$ ، $2 = y - x$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۶

۲۰. مجموع طول و عرض مختصات نقطه‌ای روی خط $y = 2x - 1$ که از دو نقطه $A(1, 1)$ و $B(2, -1)$ به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴) ۲

۲۱. فاصله نقطه A روی خط $x + y = a$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و ۵ است. مقدار a چه قدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -۲

فاصله نقطه از خط

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مهم

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

مثال: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $3x + 4y - 4 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۴) $\frac{1}{8}$

پاسخ: با استفاده از فرمول، فاصله نقطه $A(1, 2)$ را از خط $3x + 4y - 4 = 0$ می‌یابیم:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(1) + 4(2) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

نکته

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط عمودی $x = k$ برابر $|k - x_0|$ و از خط افقی $y = k'$ برابر $|k' - y_0|$ است.

مثال: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $y = -3$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۲

پاسخ: برای یافتن فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط افقی $y = -3$ باید از فرمول $|k' - y_0|$ استفاده کنیم که $k' = -3$ در این تست و $y_0 = 2$ یعنی ۲ است.

$$AH = |-3 - 2| = 5$$



مثال: می‌خواهیم از یک روستا که در مختصات $(-3, 4)$ قرار دارد یک راه آسفالت به جاده‌ای به معادله $3x - 4y - 1 = 0$ احداث کنیم. اگر واحدهای مختصات برحسب کیلومتر باشند و هزینه احداث هر کیلومتر جاده ۱۰۰ میلیون تومان باشد، حداقل هزینه احداث جاده کدام است؟

- (۱) ۵۲۰ میلیون (۲) ۵۴۰ میلیون (۳) ۵۶۰ میلیون (۴) ۵۸۰ میلیون

پاسخ: کوتاه‌ترین فاصله، خط عمود AH است.

$$AH = \frac{|3x_A - 4y_A - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3(-3) - 4(4) - 1|}{\sqrt{25}} = \frac{26}{5}$$

$$\text{حداقل هزینه} = \frac{26}{5} \times 100 = 520$$

طول جاده $\frac{26}{5}$ کیلومتر است، بنابراین:

فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مهم

حواست باشه: قبل از استفاده از این فرمول اولاً باید همه بخش‌های معادله به سمت چپ منتقل شوند و ثانیاً ضرایب x و y باید در دو معادله برابر باشند و در صورت لزوم باید با ضرب و تقسیم یک یا چند عدد در معادلات، ضرایب را یکسان نمود.

مثال: فاصله دو خط موازی $2x + 4y - 1 = 0$ و $2x + 4y + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{4}{5}$

پاسخ: با استفاده از فرمول فاصله دو خط موازی به حل تست می‌پردازیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{3}{5}$$

بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$



نکته

- در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $S = -\frac{b}{a}$ مجموع دو ریشه و $P = \frac{c}{a}$ حاصل ضرب دو ریشه است.
- در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند Δ لزوماً مثبت می‌شود.



◀ (با فرض $a, b, c \neq 0$) برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:

مثال: کدام گزینه درباره $x^2 - (\sqrt{2} - 1)x - 2\sqrt{2} - 2 = 0$ صحیح است؟

- دو ریشه مثبت دارد.
 - دو ریشه منفی دارد.
 - دو ریشه مختلف‌العلامت دارد و ریشه مثبت بزرگتر از قدرمطلق ریشه منفی است.
 - دو ریشه مختلف‌العلامت دارد و قدرمطلق ریشه منفی بزرگتر از ریشه مثبت است.
- پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$P = \frac{c}{a} = \frac{-2\sqrt{2}-2}{1} < 0, S > 0$$

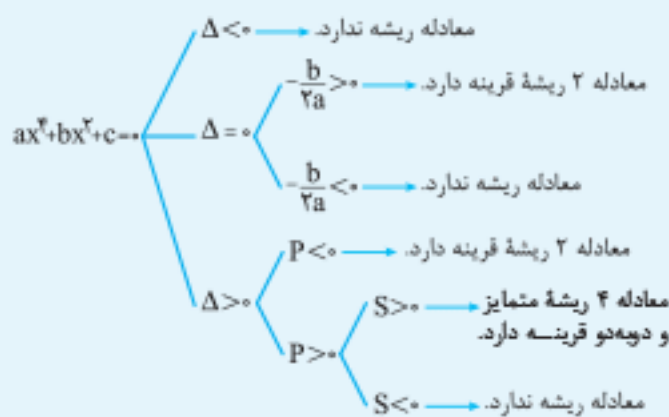
توجه: چون $P < 0$ است: پس نیازی به بررسی کردن دلتا نیست.



یک گام فراتر:

بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$

◀ (با فرض $a, b, c \neq 0$) برای ساده‌تر شدن مفهوم این موضوع، آن را به صورت نمودار درختی برایتان بیان می‌کنیم:



مثال: معادله $x^4 - 4x^2 + 2 - a = 0$ چهار ریشه متمایز دارد. حدود a کدام است؟

$$a > -2 \quad (1) \quad -2 < a < -1 \quad (2) \quad a < 2 \quad (3) \quad -2 < a < 2 \quad (4)$$

• پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ مطابق آن چه که در بالا بحث شد زمانی معادله چهار ریشه دارد که:

$$\textcircled{1} \Delta > 0 \Rightarrow (-4)^2 - 4(1)(2-a) > 0 \Rightarrow 16 - 8 + 4a > 0 \Rightarrow 8 + 4a > 0 \Rightarrow a > -2$$

$$\textcircled{2} P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2-a}{1} = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$$

$$\textcircled{3} S > 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = -\frac{-4}{1} = 4 > 0 \quad \text{بدیهی}$$

اشتراک مجموعه جواب‌های فوق $-2 < a < 2$ می‌شود.

بحث راجع به ریشه‌های معادله $ax + b\sqrt{x} + c = 0$

◀ (با قرض $a, b, c \neq 0$) به نمودار درختی زیر توجه کنید:



در حالت $P < 0$ نیازی به بررسی Δ وجود ندارد، چرا که هر وقت a و c مختلف‌العلامت باشند، Δ لزوماً مثبت می‌شود.

مثال: به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 2\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟ (معادله ریشه مضاعف ندارد).

x		0	2
$m-2$	-	-	+
m	-	+	+
P	+	-	+

تعریف نشده

$$\frac{2}{2} < m < \frac{5}{2} \quad (3)$$

$$0 < m < 2 \quad (2)$$

$$-\frac{2}{2} < m < 2 \quad (1)$$

• پاسخ: ۱، ۲، ۳، ۴ طبق نمودار ارائه‌شده، باید $\Delta > 0$ و $P < 0$ باشد.

به دلیل منفی بودن P نیازی به بررسی Δ نیست و فقط کافی است $P < 0$ باشد.

$$P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

سؤالات چهارگزینه‌ای

۳۷. معادله $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ دارای چند ریشه است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۸. معادله $(2x^2 - 1)^2 = 7 + 6(2x^2 - 1)$ دارای چند ریشه متمایز است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۳۹. مجموع ریشه‌های معادله $x^4 = 16(2x^2 - 1)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۵ (۳) ۴ (۴) ۵

۴۰. معادله $2\sqrt{x^2} + 7\sqrt{x} - 4 = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۴۱. معادله $(x - \frac{1}{x})^2 + 2(x + \frac{1}{x}) = 0$ چند ریشه دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۲. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله $(m-2)x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد؟

- (۱) $\emptyset$ (۲) $1 < m < 3$ (۳) $2 < m < 3$ (۴) $1 < m < 2$

۴۳. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟

- (۱) $-3 < m < 5$ (۲) $-3 < m < 4$ (۳) $-2 < m < 4$ (۴) $-1 < m < 5$

۴۴. ★ اگر معادله $mx^4 - 4x^2 + m - 2 = 0$ دارای چهار ریشه متمایز باشد، آن‌گاه m باید در بازه (a, b) قرار بگیرد، $b - a$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۵. ★ به ازای چه مقادیری از a معادله $x^2 - 4|x| = a$ چهار ریشه متمایز دارد؟

- (۱) $0 < a < 4$ (۲) $-4 < a < 0$ (۳) $a > -4$ (۴) $a < -4$

۴۶. ★ تعداد ریشه‌های حقیقی متمایز معادله $(x^2 + 4x + 2)^2 = x^2 + 4x + 5$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷. ★ معادله $2 = (x^2 - 2x) - (x^2 - 2x)^2$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



۵۸. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^2}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^2}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟ (تجربی ۱۴۰۰)

$125x^2 + 12x = 1$ (۴)
 $125x^2 = 12x + 1$ (۳)
 $125x^2 = 16x + 1$ (۲)
 $125x^2 + 16x = 1$ (۱)

۵۹. فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد، به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟ (تجربی ۱۴۰۰)

18 (۴)
 16 (۳)
 15 (۲)
 14 (۱)

۶۰. معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+2} - \frac{\sqrt{x+1}}{2-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

3 (۴)
 2 (۳)
 1 (۲)
 صفر (۱)

۶۱. α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $2\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چه قدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

2 (۴)
 $\frac{21}{5}$ (۳)
 $\frac{13}{4}$ (۲)
 1 (۱)

حل مسائل پارامتری ارتباط بین ریشه‌ها

اگر در یک معادله پارامتری، مقدار یک ریشه را بر حسب دیگری داشته باشیم مثلاً بدانیم یک ریشه دو برابر یا معکوس یا... دیگری است، می‌توانیم با تشکیل دستگاهی مرکب از S و P ریشه‌ها را بیابیم و بعد از آن مقدار پارامتر را پیدا کنیم.

مثال: در معادله $2x^2 - 15x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

$\frac{63}{4}$ (۴)
 $\frac{59}{4}$ (۳)
 $\frac{63}{5}$ (۲)
 $\frac{59}{5}$ (۱)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴ **روش اول:** اگر یکی از ریشه‌های معادله را α فرض کنیم، ریشه دوم برابر $\alpha + 2$ می‌شود.

در این معادله مجموع ریشه‌ها $S = -\frac{b}{a} = -\frac{-15}{2} = \frac{15}{2}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها $P = \frac{c}{a} = \frac{m}{2}$ است.

$$\begin{cases} \alpha + (\alpha + 2) = S = \frac{15}{2} \Rightarrow 2\alpha + 2 = \frac{15}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \\ \alpha(\alpha + 2) = P = \frac{m}{2} \end{cases}$$

به کمک مقدار $\alpha = \frac{3}{2}$ می‌توان مقدار m را از رابطه دوم یافت: $m = 2\alpha(\alpha + 2) \Rightarrow m = 2(\frac{3}{2})(\frac{3}{2} + 2) = \frac{9}{2}(\frac{7}{2}) = \frac{63}{2}$

روش دوم: تفاضل دو ریشه برابر ۲ است. قرمول تفاضل دو ریشه هم $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ است: بنابراین:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{(-15)^2 - 4(2)m}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 8m} = 4 \Rightarrow 225 - 8m = 16 \Rightarrow 8m = 209 \Rightarrow m = \frac{209}{8}$$

در این سوال روش دوم ساده‌تر است ولی دقت کنید روش اول قاعده کلی است و روش دوم خاص این سوال است.

سوالات چهارگزینه‌ای

۶۲. در معادله $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه، دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

5 (۴)
 $\frac{4}{5}$ (۳)
 4 (۲)
 $\frac{3}{5}$ (۱)

۶۳. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + mx - 2 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار m رابطه $2\alpha + \beta = 4$ بین ریشه‌ها برقرار است؟

$\frac{-6 \pm \sqrt{10}}{2}$ (۴)
 $-3 \pm \sqrt{5}$ (۳)
 $3 \pm \sqrt{5}$ (۲)
 $\frac{6 \pm \sqrt{10}}{2}$ (۱)

۶۴. به ازای کدام مقدار K در معادله $2x^2 + Kx + 9 = 0$ ، بین ریشه‌ها رابطه $x_1\sqrt{x_2} = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ برقرار است؟

-9 (۴)
 -11 (۳)
 11 (۲)
 9 (۱)

۶۵. اگر ریشه‌های معادله $x^2 + ax + b = 0$ دو عدد صحیح متوالی باشند، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است؟

$a^2 - b = 1$ (۴)
 $a^2 - 4b = 1$ (۳)
 $a^2 + 4b = 1$ (۲)
 $a^2 + 4b = 0$ (۱)

۶۶. به ازای کدام مقدار a ، رابطه $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} = \frac{5}{6}$ میان ریشه‌های معادله $x^2 - (a+2)x + a+1 = 0$ برقرار است؟

-2 (۴)
 2 (۳)
 -1 (۲)
 1 (۱)

۶۷. یکی از ریشه‌های معادله $x = a(x-2)^2$ از ۱۰ برابر ریشه دیگر سه واحد کمتر است، مقدار مثبت a کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{5}{9}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۶۸. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $\frac{1}{8}x^2 - (m+1)x + 2 = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۶۹. به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

نمودار تابع درجه دوم



یادآوری: نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت یک سهمی است که اگر $a > 0$ ، دهانه سهمی رو به بالا و اگر $a < 0$ ، دهانه سهمی رو به پایین می‌باشد.

سوالاتی که نمودار به همراه چند نقطه از آن داده شده و ضابطه تابع آن خواسته می‌شود را می‌توان به سه دسته کلی تقسیم‌بندی نمود:

الف: سه نقطه عادی: سه نقطه داده شده را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری می‌کنیم تا به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی برسیم. با حل دستگاه، مجهول‌های a ، b و c به دست می‌آیند و ضابطه تابع مشخص می‌شود.



مثال: نمودار مقابل، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. b کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

پاسخ: این نمودار از نقاط $(0, -3)$ ، $(1, 0)$ و $(4, -3)$ می‌گذرد، نقاط

را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -3) \Rightarrow -3 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = -3$$

$$\begin{cases} (1, 0) \Rightarrow 0 = a + b - 3 \\ (4, -3) \Rightarrow -3 = 16a + 4b - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 16a + 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = -1 \end{cases}$$

ب: رأس و یک نقطه عادی: دو نقطه داده شده را در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ جای‌گذاری می‌کنیم. همین‌طور طول رأس را در معادله

$$x = -\frac{b}{2a}$$

قرار می‌دهیم. به این ترتیب به یک دستگاه سه معادله سه مجهولی می‌رسیم و با حل آن ضرایب a ، b و c به دست می‌آیند.



مثال: با توجه به نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ کدام گزینه صحیح است؟

$$a + b + c = \frac{1}{2} \quad (۲) \quad a + b + c = -\frac{1}{2} \quad (۱)$$

$$a - b + c = \frac{1}{2} \quad (۴) \quad a - b + c = -\frac{1}{2} \quad (۳)$$

پاسخ: **روش اول:** نقاط $(0, 1)$ و $(2, -1)$ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} (2, -1) \Rightarrow -1 = 4a + 2b + c \\ (0, 1) \Rightarrow 1 = 0 + 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ b = -4a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ و } b = -2$$

از طرقی طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a} = 2$ است، بنابراین $b = -4a$ است.

$$a + b + c = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$

بنابراین می‌توان قهמיד:

روش دوم: اگر نقطه رأس سهمی را (m, h) بنامیم معادله سهمی به صورت $y = a(x-m)^2 + h$ درمی‌آید.

برای پیدا کردن a کافی است مختصات نقطه عادی را در ضابطه تابع جای‌گذاری کنیم.

مختصات رأس سهمی $(2, -1)$ است، پس $y = a(x-2)^2 - 1$ می‌باشد.

$$\text{نقطه } (0, 1) \text{ را در ضابطه تابع جای‌گذاری می‌کنیم: } y = a(x-2)^2 - 1 \xrightarrow{(0,1)} 1 = a(0-2)^2 - 1 \Rightarrow 1 = 4a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{ضابطه سهمی به صورت مقابل درمی‌آید. } y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) - 1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \Rightarrow a + b + c = \frac{1}{2} - 2 + 1 = -\frac{1}{2}$$



$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{m}{2}$$

روش دوم: ابتدا طول رأس را می‌یابیم:

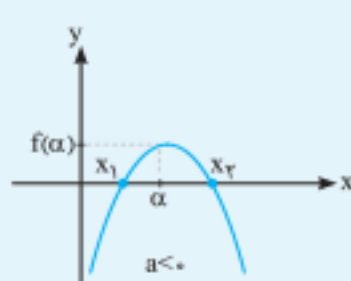
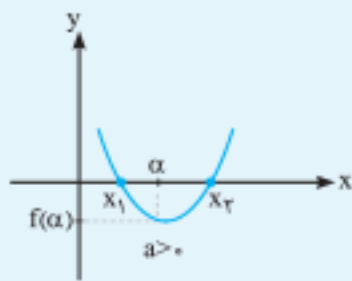
این x را در ضابطه تابع $y = x^2 + mx + 4$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y = \left(-\frac{m}{2}\right)^2 + m\left(-\frac{m}{2}\right) + 4 \Rightarrow y = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 4 = -\frac{m^2}{4} + 4$$

با توجه به این‌که عرض رأس سهمی -2 می‌باشد، پس $-\frac{m^2}{4} + 4 = -2$ است.

از این‌جا به بعد مانند آنچه در روش اول گفته شد، متوجه می‌شویم $m = +2\sqrt{6}$ است.

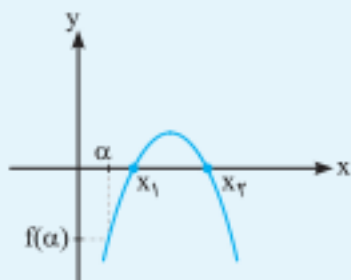
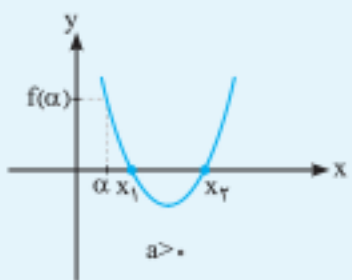
یک گام فزاینده



۱ شرط آن‌که عدد α بین دو ریشه سهمی

$y = ax^2 + bx + c$ واقع شود $(x_1 < \alpha < x_2)$ ، آن است که:

در این حالت نیازی به بررسی شرط $\Delta > 0$ نیست.



۲ شرط آن‌که عدد α خارج دو ریشه

$y = ax^2 + bx + c$ واقع شود $(\alpha < x_1 < x_2)$ یا $(x_1 < x_2 < \alpha)$ آن است که:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \end{cases}$$

مثال: اگر عدد ۲ بین ریشه‌های معادله $mx^2 + 2x + 2 = 0$ باشد، حدود m کدام است؟

(۴) $m < -1$

(۳) $0 < m < 2$

(۲) $-2 < m < 0$

(۱) $-1 < m < 0$

$af(2) < 0 \Rightarrow m(4m + 8) < 0 \Rightarrow -2 < m < 0$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

سؤالات چهارگزینه‌ای

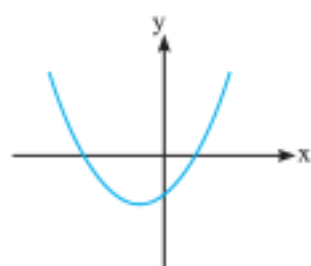
۷۰. کدام ضابطه می‌تواند مربوط به نمودار مقابل باشد؟

(۱) $y = 2x^2 + 2x + 1$

(۳) $y = 2x^2 + 5x + 1$

(۲) $y = x^2 + 2x - 1$

(۴) $y = x^2 - 2x - 1$



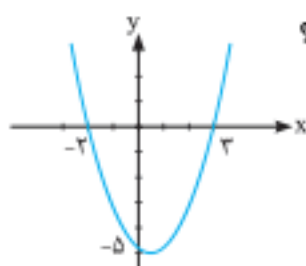
۷۱. شکل مقابل، نمودار تابع درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ را نشان می‌دهد. حاصل $a + b + c$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) -۵

(۳) ۶

(۴) -۶



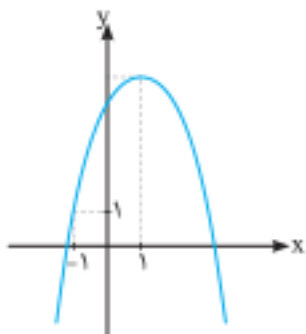
۷۲. سهمی شکل مقابل به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ می‌باشد و $a - b = -3$ است. مقدار $f(1)$ کدام است؟

(۱) -۴

(۲) صفر

(۳) ۴

(۴) ۵



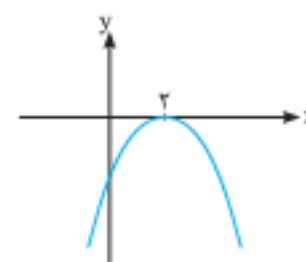
۷۳. شکل مقابل نمودار تابع درجه دوم $f(x) = kx^2 + 8x + c$ است. k کدام است؟

(۲) -۸

(۴) -۴

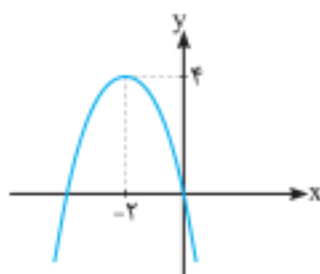
(۱) -۲

(۳) ۲



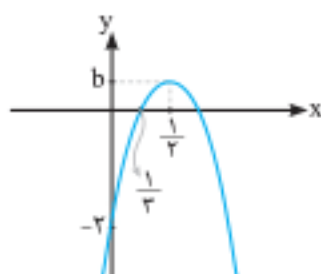
۷۴. با توجه به نمودار تابع $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ مقدار a کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) -۲
(۴) ۲



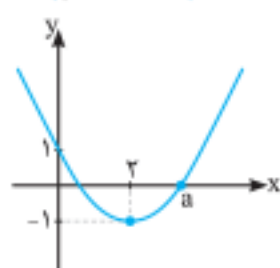
۷۵. شکل مقابل نمودار تابع درجه دوم f است. مقدار b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{3}{4}$
(۴) $\frac{1}{8}$



۷۶. با توجه به شکل مقابل، که نمودار یک تابع درجه دو را نشان می‌دهد، مقدار a کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $\frac{5}{2}$
(۳) $2 + \sqrt{2}$
(۴) $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$



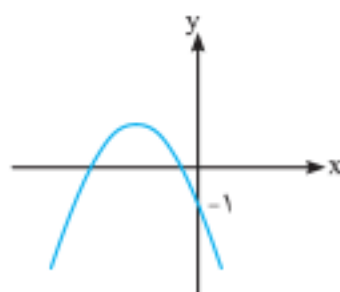
۷۷. اگر رأس یک سهمی روی نیمساز ربع اول باشد و محور x را در دو نقطه به طول‌های -۱ و ۳ قطع کند، آنگاه این سهمی محور y را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
(۲) $-\frac{3}{4}$
(۳) ۳
(۴) -۳

۷۸. محور تقارن سهمی $y = x^2 + 4x + k$ منحنی را در نقطه‌ای به عرض -۲ قطع می‌کند. طول پاره‌خطی که سهمی روی محور x ایجاد می‌کند، کدام است؟

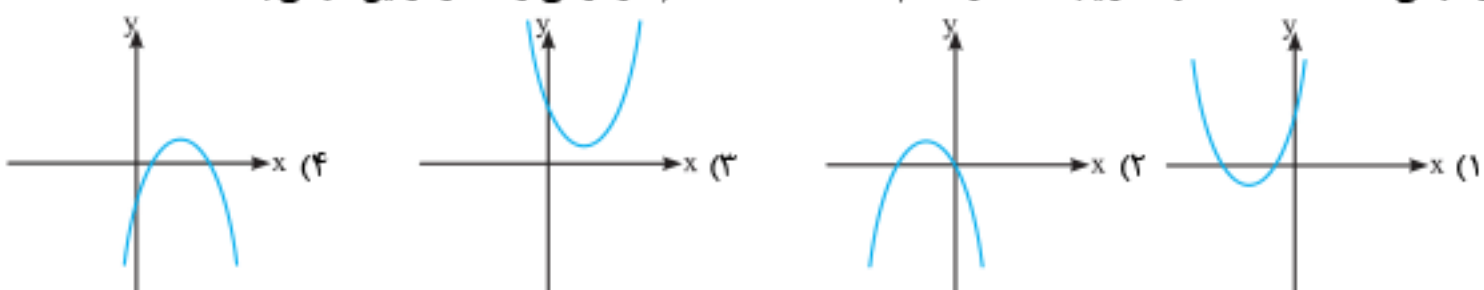
- (۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $4\sqrt{3}$
(۳) $2\sqrt{2}$
(۴) $4\sqrt{2}$

۷۹. در شکل زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. کدام گزینه در مورد ضرایب a ، b و c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ صحیح است؟



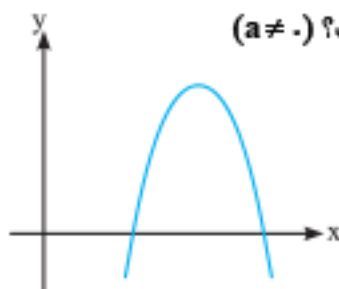
- (۱) $a < 0$ ، $b < 0$ ، $c < 0$ ، معادله دو ریشه دارد.
(۲) $a < 0$ ، $b > 0$ ، $c < 0$ ، معادله دو ریشه دارد.
(۳) $a > 0$ و $b < 0$ ، معادله ریشه ندارد.
(۴) $a < 0$ ، $b > 0$ ، $c > 0$ و معادله ریشه ندارد.

۸۰. در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، ضرایب a ، b و c هم‌علامت هستند. کدام نمودار می‌تواند نمودار این سهمی باشد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



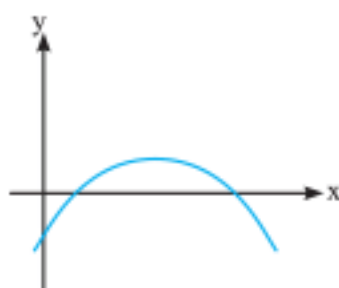
۸۱. اگر نمودار تابع $y = ax^2 + bx + \frac{1}{a}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه کدام یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) $a > 2$
(۲) $a < -2$
(۳) $b > 2$
(۴) $b < -2$



۸۲. نمودار تابع $f(x) = mx^2 + 8x - 2$ به صورت مقابل است. m چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۰



۹۲۱. مسئول یک تیم فوتبال می‌داند که احتمال بارندگی ۲۰ درصد است و خطر مصدوم شدن یک بازیکن در زمین خیس ۶۰ درصد بیش‌تر از زمین معمولی است. اگر خطر مصدوم شدن یک بازیکن در زمین خیس ۲۴٪ باشد، با کدام احتمال بازیکن مصدوم می‌شود؟
 (۱) ۱۵۴٪ (۲) ۱۶۸٪ (۳) ۱۷۷٪ (۴) ۱۸۳٪

۹۲۲. اگر $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$ باشند، آنگاه مقدار $P(B|A) + P(A|B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{11}{15}$ (۲) $\frac{14}{15}$ (۳) $\frac{22}{15}$ (۴) $\frac{23}{15}$

۹۲۳. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر دست‌کم یکی از تاس‌ها ۴ ظاهر شده باشد، احتمال آن‌که مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۷ باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{2}{11}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹۲۴. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند؛ به‌طوری‌که $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B') = \frac{1}{2}$ باشند، حاصل $P(B|A)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{10}{33}$ (۲) $\frac{4}{11}$ (۳) $\frac{5}{11}$ (۴) $\frac{7}{33}$

۹۲۵. اگر $P(A'|B) = \frac{1}{5}$ و $P(B'|A) = \frac{1}{4}$ باشند، حاصل $P(A|B) + P(B|A)$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{29}{20}$ (۲) $\frac{31}{20}$ (۳) $\frac{21}{20}$ (۴) $\frac{19}{20}$

۹۲۶. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A \cap B) = (P(A))^2$ ، آنگاه $P(A')$ کدام است؟ ($P(A) \neq 0$)

- (۱) $P(B)$ (۲) $P(A)P(B)$ (۳) $P(B')$ (۴) $1 - P(A)P(B)$

۹۲۷. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A' \cup B') + P(A) \cdot P(B) = 1$ ، آنگاه دو پیشامد A و B لزوماً نسبت به هم چگونه‌اند؟

- (۱) سازگار (۲) مستقل (۳) وابسته (۴) ناسازگار

۹۲۸. یک تاس و دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال، تاس عددی زوج و حداقل یکی از سکه‌ها «رو» را نشان می‌دهد؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۹۲۹. در یک کلاس ۲۰ نفری، ۵ نفر نقاش هستند. متوالیاً دو نفر از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر اولی نقاش باشد، احتمال آن‌که دومی نقاش باشد، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{4}{29}$ (۳) $\frac{2}{87}$ (۴) $\frac{5}{6}$

۹۳۰. در یک جمع، ۱۵ مرد و ۲۵ زن حضور دارند. در بین آن‌ها x مرد و y زن چشم سبز رنگ دارند. یک نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد زن بودن و B پیشامد چشم سبز داشتن این فرد باشد، در کدام صورت A و B همواره مستقل‌اند؟

- (۱) $\Delta x = 3y$ (۲) $39y = 25x$ (۳) $25y = 39x$ (۴) $3x = 5y$

۹۳۱. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به‌طوری‌که $P(A' | B) + P(A) = 1$ و هم‌چنین $P(A) + P(B) = \frac{1}{8}$ باشد، حداقل $P(A \cup B)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{48}$ (۳) $\frac{1}{64}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۹۳۲. در یک خانواده ۱۵ فرزندی، احتمال این‌که فرزند هفتم و دوازدهم پسر باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{\binom{15}{2}}{2^{15}}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۹۳۳. در بین ۶ نفر احتمال این‌که همگی روز شنبه به دنیا آمده باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{6!}{2 \times 7^5}$ (۲) $1 - \frac{6!}{7^5}$ (۳) $\frac{7!}{7^6}$ (۴) $\frac{1}{7^6}$

۹۳۴. در فضای نمونه‌ای هم‌شانس $\{a, b, c, d\}$ ، پیشامد $\{c, d\}$ با کدام پیشامد زیر مستقل است؟

- (۱) $\{a, b\}$ (۲) $\{b, d\}$ (۳) $\{c, a, d\}$ (۴) $\{c, b, a\}$

۹۳۵. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم مجموع آن‌ها ۵ یا ۱۰ آمده است. چقدر احتمال دارد که هر دو عدد رو شده زوج نباشند؟

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{7}$ (۳) $\frac{5}{27}$ (۴) $\frac{7}{27}$

۹۳۶. در یک مسابقه اتومبیل‌رانی احتمال این‌که یک اتومبیل دچار نقص فنی شود، $\frac{1}{4}$ است. احتمال ترسیدن به خط پایان برای یک اتومبیل خراب $\frac{1}{2}$ می‌باشد. اگر اتومبیلی را در این مسابقه به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که خراب بوده و از خط پایان بگذرد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{82}$ (۳) $\frac{1}{28}$ (۴) $\frac{1}{18}$



۹۳۷. یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم سکه اول «رو» آمده است. با کدام احتمال، دست‌کم یکی از سکه‌ها «پشت» آمده است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۹۳۸. اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = 4P(A \cap B) = 2P(B)$ ، آن‌گاه چقدر احتمال دارد فقط پیشامد A رخ دهد؟ (A و B تهی نیستند.)

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{8}$ (۴) $\frac{9}{16}$

۹۳۹. ۴ جعبه داریم که در هر کدام پنج توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. اگر از هر جعبه یک توپ به تصادف برداریم، احتمال این‌که تمامی این توپ‌ها شماره یکسان داشته باشند، چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{5^4}$ (۲) $\frac{1}{5^3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{1}{5}$

۹۴۰. یک تاس را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که بزرگ‌ترین عددی که می‌آید ۴ باشد، کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{3})^6$ (۲) $(\frac{2}{3})^6$ (۳) $\frac{2^6 - 1}{3^6}$ (۴) $(\frac{2}{3})^5$

۹۴۱. می‌دانیم امروز احتمال آمدن برف $\frac{1}{2}$ و فردا $\frac{1}{22}$ است. احتمال آمدن برف فردا به شرط آن‌که امروز برف بیاید، $\frac{1}{7}$ است. احتمال برف نیامدن فردا به شرط آن‌که امروز برف نیاید، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{72}$ (۳) $\frac{1}{78}$ (۴) $\frac{1}{9}$

۹۴۲. خانواده‌ای ۵ فرزند دارد. می‌دانیم فرزند دوم پسر است. احتمال آن‌که آخرین فرزند، سومین پسر باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{32}$ (۲) $\frac{3}{32}$ (۳) $\frac{1}{16}$ (۴) $\frac{3}{16}$

۹۴۳. احتمال ازدواج پسر و دختر خانواده‌ای تا ۵ سال دیگر به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ است. اگر پسر ازدواج کند، احتمال ازدواج دختر به $\frac{1}{4}$ افزایش می‌یابد. با کدام احتمال حداقل یکی از آن‌ها تا ۵ سال دیگر ازدواج خواهد کرد؟

- (۱) $\frac{11}{24}$ (۲) $\frac{13}{24}$ (۳) $\frac{7}{24}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۹۴۴. در یک خانواده سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟

- (۱) $\frac{3}{8}$ (۲) $\frac{3}{7}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $\frac{5}{8}$

۹۴۵. یک تاس همگن را انداخته‌ایم. می‌دانیم عدد ظاهر شده، مضرب ۲ نیست. احتمال آن‌که شماره ظاهر شده ۲ باشد، کدام است؟

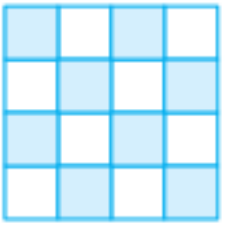
- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۹۴۶. در دو طرف یک سکه هدهای ۱ و ۲ نوشته شده است. در دو بار پرتاب این سکه و یک بار پرتاب تاس، اگر مجموع هدهای رو شده بزرگ‌تر از ۵ باشد، احتمال این‌که عدد تاس برابر مجموع دو سکه باشد، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{2}{9}$ (۳) $\frac{3}{16}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۹۴۷. دو خانه از صفحه شطرنجی 4×4 (شکل روبه‌رو)، انتخاب می‌کنیم. اگر دو خانه انتخاب شده هم‌رنگ باشند، احتمال آن‌که دو خانه در یک سطر یا در یک ستون از صفحه شطرنجی باشند، کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{11}$ (۲) $\frac{2}{7}$ (۳) $\frac{5}{13}$ (۴) $\frac{4}{9}$



۹۴۸. در پرتاب یک سکه و یک تاس، دو پیشامد A «مضرب ۲ بودن عدد تاس» و B مستقل هستند. تعداد عضوهای پیشامد B کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۸

۹۴۹. در گروه زنان ساکن یک روستا، ۶۰ درصد آن‌ها تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آن‌ها مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (تجربی ۹۰)

- (۱) $\frac{1}{7}$ (۲) $\frac{1}{75}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{85}$

۹۵۰. دو تاس را باهم می‌اندازیم. با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟ (تجربی قانع ۹۰)

- (۱) $\frac{2}{9}$ (۲) $\frac{5}{18}$ (۳) $\frac{7}{18}$ (۴) $\frac{4}{9}$

۹۵۱. چهار دانش‌آموز کلاسی روی یک نیمکت نشسته‌اند. با کدام احتمال، ماه تولد حداقل دو نفر آن‌ها یکسان است؟ (تجربی قانع ۹۷)

- (۱) $\frac{19}{48}$ (۲) $\frac{41}{96}$ (۳) $\frac{23}{48}$ (۴) $\frac{55}{96}$

پاسخ نامہ تشریحی

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{3}$$

سپس معادله خط را به کمک یکی از نقاط A یا B می‌نویسیم:

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3y = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$$

روش دوم: فرض می‌کنیم معادله خط به صورت $y = ax + b$ باشد، با جای‌گذاری دو نقطه A(۳, ۰) و B(۰, -۲) در معادله، مجهولات a و b را می‌یابیم:

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 0 = a(3) + b \\ -2 = a(0) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - 2$$

طرفین را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$3y = 2x - 6 \Rightarrow 2x - 3y - 6 = 0$$

۲. اگر سه نقطه را به ترتیب A(m, ۲)، B(۶, ۴m+۱) و O(۰, ۰) در نظر بگیریم، شیب‌های دو خط OA و OB باید با هم برابر باشند تا این سه نقطه در یک راستا قرار بگیرند:

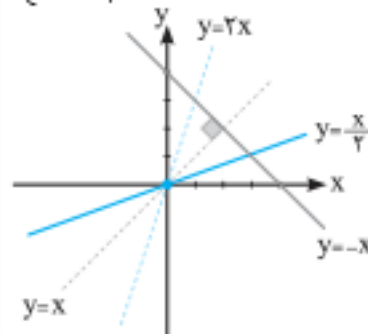
$$m_{OA} = m_{OB} \Rightarrow \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O}$$

$$\Rightarrow \frac{2 - 0}{m - 0} = \frac{4m + 1 - 0}{6 - 0}$$

$$4m^2 + m - 18 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}(4m + 9)(4m - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{-9}{4} \\ m = 2 \end{cases}$$

۳. ابتدا محل برخورد دو خط $y = \frac{x}{2}$ و $y = 2x$ را با تشکیل دستگاه می‌یابیم:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{x}{2} \Rightarrow 4x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$$



محل برخورد، نقطه (۰, ۰) است.

خط مطلوب، بر خط $y = -x + 4$

عمود است. پس شیب آن عکس و

قرینه شیب خط $y = -x + 4$ است.

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$$

معادله خط مطلوب را به کمک نقطه (۰, ۰) و شیب $m = 1$ می‌نویسیم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

۴. ابتدا شیب خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

چون خط مطلوب، بر خط AB عمود است پس شیب آن، عکس و قرینه

شیب AB است.

$$m' = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

بنابراین شیب خط $(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0$ برابر $-\frac{3}{2}$ است.

$$m' = \frac{-2K}{K+1} = \frac{-3}{2} \Rightarrow 2K = 2K + 3 \Rightarrow K = 3$$

حال با جای‌گذاری ۳ به جای K، معادله را حل می‌کنیم:

$$(K+1)y + 2Kx - K + 1 = 0 \xrightarrow{K=3} 2y + 3x = 1$$

۵. شیب BC را می‌یابیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - 6}{0 - (-5)} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

چون ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است، بنابراین شیب AH عکس و

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$$

قرینه BC می‌باشد.

حال معادله خط AH را می‌یابیم:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - (-4) = \frac{5}{4}(x - (-1))$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{17}{4}$$

۶. برای یافتن نقطه H باید معادله دو

خط AH و BC را بیابیم و آن‌ها

را با هم قطع دهیم.



$$\begin{cases} \text{شیب خط BC: } m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2 - (-1)}{0 - 3} = -1 \\ \text{معادله خط BC: } y - y_C = m_{BC}(x - x_C) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -x + 2$$

از آنجایی که خط AH بر خط BC عمود است شیب خط AH عکس و

$$m_{AH} = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

قرینه شیب خط BC است.

معادله خط AH را می‌یابیم:

$$y - y_A = m_{AH}(x - x_A) \Rightarrow y - 5 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 3$$

برای یافتن نقطه H باید دستگاه معادلات دو خط AH و BC را

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow x_H = \frac{-1}{2} \Rightarrow y_H = \frac{5}{2}$$

تشکیل دهیم:

۷. طبق فرمول کافی است میانگین طول‌ها و عرض‌های مختصات نقاط داده

شده را بیابیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + (-4)}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

مختصات نقطه وسط دو نقطه A و B نقطه $M(-\frac{5}{2}, 4)$ است.

۸. فاصله دو نقطه را می‌یابیم:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - x)^2 + (4 - 1)^2}$$

$$= \sqrt{(3 - x)^2 + 3^2} = 5 \Rightarrow (3 - x)^2 + 9 = 25$$

$$(3 - x)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} 3 - x = 4 \Rightarrow x = -1 \\ 3 - x = -4 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$$

حاصل ضرب مقادیرهای به‌دست آمده برای x برابر -۷ است.

به کمک راهبرد فوق مساحت را می‌یابیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(2 \times 0) + (3 \times 2) + (0 \times 5) - (3 \times 5 + 0 \times 0 + 2 \times 2)] = \frac{1}{2} [6 - 19] = \frac{-13}{2} = -6.5$$

از آن جایی که مساحت نمی‌تواند عددی منفی باشد، پس $S = 6.5$ است.

۱ ۲ ۳ ۳۳

فاصله نقطه $(3, -1)$ در مرکز مربع تا یک ضلع آن، برابر نصف طول ضلع مربع است.

$$OH = \frac{|2y_0 - x_0 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2(-1) - 3 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$$

طول ضلع مربع ۲ برابر OH یعنی $\frac{20}{\sqrt{5}}$ است، پس مساحت مربع برابر

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = 80$$

می‌شود با:

۱ ۲ ۳ ۳۴

کافی است معادله ضلع BC را نوشته و سپس فاصله رأس A از آن را به دست آوریم:

$$BC: y - (-2) = \frac{2 - (-2)}{2 - 2}(x - 2) \Rightarrow y + 2 = x - 2 \Rightarrow y - x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{قرار دارد}]{\text{H بر روی BC}} AH = \frac{|5 - 1 + 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

۱ ۲ ۳ ۳۵

فاصله نقطه $A(2, \beta)$ را از دو خط مورد نظر یعنی $2x - y = 0$ و $\frac{x}{3} - y + 1 = 0$ محاسبه می‌کنیم:

$$AH = \frac{|2(2) - \beta|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|6 - \beta|}{\sqrt{5}}$$

$$AH' = \frac{|\frac{2}{3} - \beta + 1|}{\sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{|\frac{5}{3} - \beta|}{\sqrt{\frac{10}{9}}}$$

$$= \frac{3|\frac{5}{3} - \beta|}{\sqrt{10}} = \frac{|5 - 3\beta|}{\sqrt{10}}$$

حال این دو مقدار را برابر می‌گذاریم:

$$\frac{|5 - 3\beta|}{\sqrt{10}} = \frac{|6 - \beta|}{\sqrt{10}} \Rightarrow |5 - 3\beta| = |6 - \beta|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5 - 3\beta = 6 - \beta \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} \\ 5 - 3\beta = -6 + \beta \Rightarrow \beta = \frac{11}{4} \end{cases}$$

مجموع مقدارهای ممکن برای β برابر است با: $\frac{11}{4} + (-\frac{1}{2}) = \frac{9}{4}$

$$\frac{|2x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|2(0) + 4y_0 - 1|}{5} = 2$$

$$\Rightarrow |4y_0 - 1| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 4y_0 - 1 = 10 \Rightarrow y_0 = \frac{11}{4} = 2.75 \\ 4y_0 - 1 = -10 \Rightarrow y_0 = \frac{-9}{4} = -2.25 \end{cases}$$

روش دوم: معادله خط مورد نظر را که موازی با خط $2x + 4y - 1 = 0$ است را به صورت $2x + 4y + c = 0$ در نظر می‌گیریم. فاصله این دو خط از یکدیگر برابر ۲ است:

$$\frac{|c - (-1)|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow |c + 1| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 9 \Rightarrow 2x + 4y + 9 = 0 \xrightarrow{x=0} y = -\frac{9}{4} \\ c = -11 \Rightarrow 2x + 4y - 11 = 0 \xrightarrow{x=0} y = \frac{11}{4} = 2.75 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۳۱

دو خط موازی‌اند، پس شیب‌های آن‌ها با هم برابرند.

$$\frac{1}{2} = \frac{m}{m+2} \Rightarrow m+2=2m \Rightarrow m=2$$

اگر مساحت مربع ۱۰ است، پس طول ضلع آن یا فاصله دو خط موازی $\sqrt{10}$ است.

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 2x - 6y - k = 0 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ x - 3y - \frac{k}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-\frac{k}{2} + 4|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$\frac{|-\frac{k}{2} + 4|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |-\frac{k}{2} + 4| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{k}{2} + 4 = 10 \Rightarrow k = -12 \\ -\frac{k}{2} + 4 = -10 \Rightarrow k = 28 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۳۲

راهبرد

برای یافتن مساحت مثلثی با رئوس $B(x_B, y_B)$ ، $A(x_A, y_A)$ و $C(x_C, y_C)$ می‌توان از روش زیر استفاده نمود:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A) - (x_B y_A + x_C y_B + x_A y_C)]$$

تذکره:

- ترتیب چیدن نقاط در فرمول بالا اهمیتی ندارد، (برای شکل‌های دارای ۳ رأس) فقط اولین نقطه در مرتبه آخر باید تکرار شود.
- در صورت منفی شدن جواب S ، مساحت برابر قدرمطلق آن است.